LOGISTIKA

(Príklady)

doc.Ing.Albín Malejčík,CSc.

1. PROCESY ALOKÁCIE

1.1 STATICKÉ ALOKAČNÉ MODELY V RIADENÍ PODNIKOV

Alokačné modely zobrazujú procesy alokácie zdrojov obyčajne tak, aby boli optimálne z hľadiska určitého cieľa, vyjadrené účelovou funkciou. Mnohé z týchto štandardných alokačných modelov je možné použiť v riadení prevádzkových procesov v podniku. Pokiaľ nebude osobitne uvedené pôjde vždy o modely lineárneho programovania.

V riadiacej praxi podnikov vzniká sústavne problém určenia potreby zdrojov, ktoré vo svojej podstate nie sú alokačným problémom, ale danú myšlienku je v týchto procesoch možné bezprostredne využiť.

V podniku je **n** činností (j = 1, 2, ... n), ktoré zodpovedajú výrobe jednotlivých výrobkov (každý inou technológiou) a na výrobu sa používa m zdrojov (i = 1, 2, ... m). Známe sú všetky technologické koeficienty (spotrebné normy) $\mathbf{a}_{ij}$, ktoré vyjadrujú koľko jednotiek i-tého zdroja je potrebných na výrobu jednotky j-tého výrobku a teda je známa matica týchto koeficientov . **A** Dané sú ďalej množstvá $\mathbf{x}_j$ (j = 1, 2, ... n) jednotlivých výrobkov, ktoré sa budú vyrábať a ktoré tvoria vektor plánu výroby **x** .Treba nájsť množstvá zdrojov b_i (i = 1, 2, ... m) potrebné na realizáciu výroby **x.**

Za predpokladu, že je daná matica **A** a vektor výroby **x**, vektor potrebných zdrojov dostaneme násobením matice **A** vektorom **x** sprava tak, že platí rovnica:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Vzhľadom na to, že výroba nemôže byť záporná, musí platiť:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Výpočet vektora zdrojov **b** pri danom **x** na určenie potrieb materiálu, práce a výrobných kapacít je jednou z úloh, ktorým slúžia maticové modely.

Príklad 1: Podnik vyrába 3 výrobky pomocou štyroch zdrojov. Suroviny A, polovýrobku B, polovýrobku C a polovýrobku D. Matica technologických koeficientov je uvedená v tabuľke. Výrobný program predpisuje výrobu 5 tisíc jednotiek 1. výrobku, 7 tisíc jednotiek 2. výrobku a 3 tisíc jednotiek 3. výrobku.

Tabuľka

Výrobok / Zdroj	1.	2.	3.
Surovina A	3 kg	3 kg	4 kg
Polovýrobok B	8 kg	9 kg	8 kg
Polovýrobok C	1 kg	2 kg	2 kg
Polovýrobok D	5 kg	1 kg	- kg

Vektor potreby zdrojov určíme podľa vzťahu:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 119 \\ 23 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Na zabezpečenie výrobného programu sú potrebné zdroje v množstve 44, 119, 23 a 32 ton.

1.2 MODELY OPTIMALIZÁCIE VÝROBY V PODNIKU

Na predchádzajúce úlohy bezprostredne nadväzuje úloha o optimalizácii sortimentu výroby, ktorý vyjadruje bežný problém súvisiaci s plánovaním výroby. V týchto úlohách je daná matica **A** a vektor zdrojov **b**. Treba určiť množstvá jednotlivých výrobkov (vektor **x**). V základnej forme úlohy sa predpokladá, že disponibilné zdroje **b** sú ohraničené. Množstvá výroby(**x**), ktoré podnik bude z jednotlivých výrobkov produkovať, môže nám určiť v rámci daných zdrojov. Predpokladáme, že ich bude vyrábať v súlade s účelovou funkciou, ktorou môže byť maximalizácia zisku trhovej produkcie množstva výroby a iné. Známy je vektor koeficientov účelovej funkcie **c** (napr. jednotkový, zisk na výrobok). Úlohu potom možno zapísať nasledovne:

$$\mathbf{cx} = \mathbf{max}$$

na platnosti ohraničenú

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

a podmienok nezápornosti

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Príklad 2: Predpokladajme, že ide o výrobný plán podniku uvedený v príklade 1. a platí matica **A**. Suroviny A je k dispozícii 44 ton, z polovýrobku B 119 ton, z polovýrobku C 23 ton a z polovýrobku D 32 ton. Úlohou je určiť optimálne vyrobené množstvo 1. výrobku x_1, 2. výrobku x_2 a 3. výrobku x_3 (v tis. ks). Jednotkový zisk pri výrobe 1. výrobku je 70,-Sk 2. výrobku 90,-Sk a 3. výrobku je 50,- Sk.

Model zodpovedá úlohe lineárneho programovania:

$$70\, x_1 + 90\, x_2 + 50\, x_3 \leq \max$$

za podmienok

$$3\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 \leq 44$$
$$8\, x_1 + 9\, x_2 + 8\, x_3 \leq 119$$

$$1\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 \leq 23$$
$$5\,x_1 + 1\,x_2 \qquad \leq 32$$
$$\text{všetky } x_{ij} \leq 0$$

Predpokladajme, že zdroje sa nemusia vyčerpať úplne, napr. nepoužité zdroje možno spotrebovať v ďalšom období.

Tento jednoduchý model výroby v podniku možno doplniť zaradením ďalších ohraničení. Doplnkové ohraničenia vyjadrujú najčastejšie:

1. Ohraničenie určitej premennej (činnosti) zhora (t.j. je daná maximálna hodnota) alebo zdola (je daná minimálna hodnota). Ide o predpis vyrábať maximálne alebo minimálne množstvo určitého výrobku:

$$\mathbf{x_1 < a}$$
$$\mathbf{x_2 > b}$$

a, b - limitujúce množstvo výroby.

2. Zriedkavejšie sa vyskytuje spoločné ohraničenie súčtu skupiny premenných. Predpokladajme, že súčet vyrobených množstiev dvoch výrobkov musí byť aspoň a jednotiek. Uvedený vzťah možno napísať nasledovne:

$$\mathbf{x_1 + x_2 \geq a}$$

3. Iný typ ohraničenia vzniká, ak z výrobných či odbytových dôvodov je určený pomer, v ktorom sa majú vyrábať jednotlivé výrobky. Predpokladajme, že výrobok 1. a 2. sa majú vyrábať v určitom pomere $k_1 : k_2$. Pre vyrobené množstvo to znamená, že tomuto pomeru vyhovuje rovnosť:

$$\frac{\mathbf{x_1}}{\mathbf{k_1}} = \frac{\mathbf{x_2}}{\mathbf{k_2}}$$

po úprave

$$\mathbf{k_2 . x_1 - k_1 . x_2 = 0}$$

4. Predchádzajúci prípad sa môže modifikovať, ak pri výrobe v predpísanom pomere existuje na začiatku obdobia počiatočná zásoba určitého výrobku. Predpokladajme, že v predchádzajúcom prípade máme počiatočnú výrobu 2. výrobku a jednotiek, potom:

$$\mathbf{k_1 . x_1 \leq k_2 . x_2 + a}$$

po modifikácii

$$\mathbf{k_1 . x_1 - k_2 . x_2 \leq a}$$

5. Na uvedené prípady nadväzujú situácie, keď sa výrobky majú vyrábať v súpravách. Ak ide o výrobu 3 výrobkov potrebných vyrábať v súpravách v pomere $\mathbf{k_1 : k_2 : k_3}$. Problém možno riešiť určením nerovníc. Ak sa dopyt výrobkov realizuje len vo forme

súprav, účelovou funkciou bude obyčajne maximalizácia počtu súprav **k**. Pri uvedenom pomere sa počet súprav určí ako najmenšie **k**, pre ktoré platí:

$$\frac{x_1}{k_1} \geq k; \frac{x_2}{k_2} \geq k; \frac{x_3}{k_3} \geq k$$

resp.:

$$\mathbf{x_1 - k \,.\, k_1 \geq 0 \;;\; x_2 - k \,.\, k_2 \geq 0 \;;\; x_3 - k \,.\, k_3 \geq 0}$$

Iný variant modelu plánu výroby vzniká, ak výrobky možno vyrobiť viacerými technológiami a výroba pomocou každej technológie je spojená s odlišnými hodnotami technologických koeficientov, resp. koeficientmi účelovej funkcie.

Príklad 3: Podnik používa na výrobu 4 technológie, spotrebúva jednu surovinu, vyrába i spotrebúva 2 polovýrobky a vyrába 3 výrobky. Suroviny je k dispozícii 10 000 jednotiek. Počiatočná zásoba prvého polovýrobku je 1 000 jednotiek. Súpravu tvoria výrobky v pomere 4 : 3 : 5. Technologické koeficienty úlohy sú uvedené v tabuľke.

Technologické koeficienty úlohy:

Technológia / Zdroj	I.	II.	III.	IV.
Surovina A	- 8	- 7	- 6	- 4
Polovýrobok A	- 2	- 3	2	2
Polovýrobok B	- 1	- 5	- 3	1
Polovýrobok C	- 2	4	- 1	-
Výrobok A	2	5	3	2
Výrobok B	4	5	6	-
Výrobok C	-	4	3	4

Počet súprav sa rovná najmenšiemu zo zlomkov:

$$\frac{2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4}{4}; \quad \frac{4x_1 + 5x_2 + 6x_3}{3}; \quad \frac{4x_2 + 3x_3 + 4x_4}{5}$$

Cieľom je zabezpečiť, aby počet súprav bol maximálny. Táto hodnota je ďalšou premennou označenou x_5. Pre prvý z uvedených zlomkov platí:

$$\frac{2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4}{4} \geq x_5$$

z čoho:

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 \geq 0$$

Podobne je možné upraviť aj ostatné zlomky. Model zodpovedá úlohe:

$$x_5 = \max$$

za podmienok:

$$\begin{aligned}
&10\,000 - 8x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 4x_4 \geq 0\\
&1\,000 - 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 0\\
&- x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 0\\
&- 2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 0\\
&2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 \geq 0\\
&4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_5 \geq 0\\
&4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 \geq 0\\
&x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots 5
\end{aligned}$$

Uvedené modely opisujú komplexné alokačné procesy, ktoré zahrňujú predovšetkým výrobu a zdroje zabezpečujúce výrobu. Okrem toho v plánovacom procese podniku možno použiť aj lineárne alokačné modely, ktoré zobrazujú čiastkové procesy prebiehajúce v podniku.

1.3 VŠEOBECNÉ DOPRAVNÉ PROBLÉMY

Pri plánovaní dopravy a v obchodných vzťahoch vznikajú tzv. dopravné problémy. V takýchto modeloch vystupuje ako činnosť preprava určitého výrobku, či tovaru od **i**-tého obchodného partnera k **j**-tému odberateľovi na úrovni $\mathbf{x_{ij}}$. Predpokladáme m dodávateľov (napr. výrobný podnik, sklad, odosielateľ a pod.). Všeobecne túto situáciu označíme ako $\mathbf{V_i}$ (i = 1, 2, ... m). Okrem toho existuje n odberateľov (miesto určenia, stavenisko, obchodný partner, odberateľ a pod.). Uvedenú pozíciu označíme ako $\mathbf{S_j}$ (j = 1, 2, ... n). Od i-tého obchodného partnera (dodávateľa) treba dopraviť množstvo $\mathbf{a_i}$ a j-tý odberateľ (obchodný partner) potrebuje množstvo $\mathbf{b_j}$. Známe sú všetky jednotkové dopravné náklady od **i**-tého dodávateľa **j**-tému odberateľovi $\mathbf{c_{ij}}$. Ide o lineárne náklady, priamo úmerné prepravným vzdialenostiam. Úlohou je nájsť minimum účelovej funkcie – celkových dopravných nákladov:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.x_{ij}$$

za platnosti **m** (počet dodávateľov) bilančných rovníc:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (\mathbf{i = 1, 2, \dots m})$$

a ďalších **n** (počet odberateľov) bilančných rovníc:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (\mathbf{j = 1, 2, \dots n})$$

Intuitívne je aj tu zrejmé, že prepravované množstvá $\mathbf{x_{ij}}$ musia byť nezáporné. Model však treba explicitne doplniť **m** + **n** triviálnymi podmienkami nezápornosti:

všetky $\mathbf{x_{ij} \geq 0}$ $\qquad$ **(i = 1, 2, ... m); (j = 1, 2, ... n)**

Predpokladáme zároveň, že ide o vybilancovaný dopravný problém (čo je v praxi bežné), pre ktorý platí:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Príklad: Z 3 tehelní (i = 1, 2, 3) sa zásobujú 4 staveniská (j = 1, 2, 3, 4). Kapacity tehelní a_i, potreba tehál na staveniskách b_j (obe v tis. jednotkách) a matica dopravných nákladov sú uvedené v tabuľke:

Tabuľka

Stavenisko Tehelne	S_1	S_2	S_3	S_4	a_i
V_1	3	4	4	7	12
V_2	9	11	7	8	17
V_3	6	5	17	8	7
b_j	1	16	9	10	36

Za týchto podmienok treba priradiť kapacity tehelní staveniskám a určiť optimálny plán dopravy. V modeli daného dopravného problému účelovú funkciu môžeme zapísať nasledovne:

$$3x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 7x_{14} + 9x_{21} + 11x_{22} + 7x_{23} + 8x_{24} + 6x_{31} + 5x_{32} + 17x_{33} + 8x_{34} = \min$$

za podmienok:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 12\,000 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 17\,000 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 7\,000 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1\,000 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 16\,000 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 9\,000 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 10\,000
\end{aligned}$$

a za triviálnych podmienok:

$x_{ij} \geq 0$ (pre každé i a j)

Dopravná úloha je nevybilancovaná (nevyrovnaná) ak:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

t.j. odosielané množstvá sa nerovnajú požadovaným.

Ak súčet odosielaných množstiev prevyšuje súčet požadovaných v modeli, namiesto rovníc platia nerovnice:

Keď platí že: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i$

Tento prípad možno interpretovať ako nevyužitie výrobných kapacít a úlohou (okrem určenia optimálnych dopravných nákladov) je určiť aj najprijateľnejšie rozdelenie nevyužitia kapacít vzhľadom na dopravné náklady.

Ak naopak súčet požadovaných množstiev $\mathbf{b_j}$ prevyšuje kapacity:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j$$

Ide o najprijateľnejšie rozdelenie celkového nedostatku (deficitu). Tak isto ako v predchádzajúcom prípade v modeli uplatníme namiesto rovníc adekvátne nerovnice.

1.4 VYUŽITIE DOPRAVNÉHO MODELU PRI RIEŠENÍ VÝROBNÝCH KAPACÍT

Osobitný typ modelu slúži na optimálne využitie výrobných kapacít. Kým využívanie nezameniteľných kapacít možno riešiť pomocou doteraz uvedených alokačných modelov, nasledovný model sa uplatňuje pri riešení problémov optimálneho využívania zameniteľných výrobných kapacít. Tieto kapacity predstavujú zameniteľné stroje v operatívnom plánovaní, kapacitu prevádzok s rovnakým výrobným programom alebo pri plánovaní na iných porovnateľných úrovniach.

Výrobná prevádzka podniku vyrába na **m** nezameniteľných strojov (môže vyrábať ľubovoľný výrobok) **n** výrobkov, pričom na výrobu **j**-tého výrobku (j = 1, 2, ... n) na každom stroji je potrebných $\mathbf{h_j}$ hodín. Na **i**-tom stroji (i = 1, 2, ... m) na výrobu **j**-tého výrobku vznikajú náklady $\mathbf{c_{ij}}$. Predajná cena **j**-tého výrobku je $\mathbf{C_{pj}}$.

Známa je kapacita **i**-tého stroja $\mathbf{a_i}$ (v časových jednotkách napr. hodinách), počet **i**-tých strojov $\mathbf{s_i}$, prácnosť **j**-tého výrobku a potreba výrobku na príslušné plánovacie obdobie je $\mathbf{b_j}$. Úlohou je zostaviť plán využitia kapacít tak, aby celkový čistý výnos (zisk, tržba a pod.) prípadne celkové náklady boli optimálne.

V prvej jednoduchšej alternatíve úlohy predpokladajme, že prácnosť výrobkov $\mathbf{h_j}$ je rovnaká na všetkých strojoch. Kapacitu skupiny strojov $\mathbf{\bar{a}_i}$ vypočítame ako:

$$\mathbf{\bar{a}_i = a_i \,.\, s_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

a potreba kapacít pri výrobe **j**-tého výrobku $\bar{b}_j$:

$$\mathbf{b_j = b_j \,.\, h_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$$

Zisk pri výrobe **j**-tého výrobku na **i**-tom stroji je:

$$\mathbf{z_{ij} = C_{ij} - c_{ij}}$$

a zisk prepočítaný na časovú jednotku (hodinový zisk):

$$\bar{z}_{ij} = \frac{z_{ij}}{h_j}$$

Podobne časové náklady $\bar{c}_{ij}$:

$$\bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{h_j}$$

Problémom je využívanie kapacít strojov pri výrobe jednotlivých výrobkov tak, aby zisk výroby či náklady boli optimálne. Všeobecne treba určiť $\mathbf{x}_{ij}$ čo znamená aká časová kapacita **j**-tého stroja sa má využiť na výrobu **i**-tého výrobku, aby celkové plánované množstvo výrobkov $\mathbf{b}_j$ bolo vyrobené s optimálnymi výnosmi či nákladmi.

Ak výrobná činnosť zodpovedá využitiu časti kapacity **i**-tých strojov pri výrobe **j**-tého výrobku na úrovni $\mathbf{x}_{ij}$ časových jednotiek (hodín), model má nasledovnú formu úlohy:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{z}_{ij}.x_{ij} = \mathbf{max}$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_{ij}.x_{ij} = \mathbf{min}$$

za podmienok vychádzajúcich z obmedzenia kapacity strojov:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le \bar{a}_i \qquad \mathbf{(i = 1, 2, ... \ m)}$$

príslušných rovníc potom bude **m**. A obmedzujúcich podmienok vyplývajúcich z potreby vyrobiť $\mathbf{b}_j$ množstvo výrobkov:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad \mathbf{(j = 1, 2, ... \ n)}$$

príslušných rovníc potom bude **n**. A triviálnych podmienok len nezáporného výrobného množstva:

$$\mathbf{x_{ij} \ge 0} \qquad \mathbf{(i = 1, 2, ... \ m); \ (j = 1, 2, ... \ n)}$$

Z porovnania uvedených vzťahov je zrejmé, že po jednoduchých úpravách sa úloha o využití zameniteľných výrobných kapacít previedla na dopravnú úlohu. Takto upraviteľné úlohy sa nazývajú **zovšeobecnené dopravné úlohy**.

Pri takýchto úlohách tiež platí podmienka vybilancovanosti:

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_j$$

Ak je úloha nevybilancovaná, vzťahy pre výpočet majú formu nerovníc.

Príklad: Závod vyrába 3 výrobky (P_1, P_2, P_3) na 3 druhoch strojov (M_1, M_2, M_3). Náklady na výrobu c_{ij}, prácnosť h_j, plánované množstvo výrobkov na mesiac b_j, počty strojov s_i a ich kapacita a_i sú uvedené v tabuľke.

Tabuľka

Výrobok / Stroj	Náklady c_{ij}			Kapacita strojov	Počet strojov
	P_1	P_2	P_3		
M_1	150	129	270	160	3
M_2	170	141	250	160	2
M_3	140	144	280	160	3
Prácnosť h_j	4	3	2		
Potreba b_j	150	120	130		
Cena C_{pj}	200	180	300		

Kapacity skupín strojov: $\bar{a}_1 = 3 \,.\, 160 = 480$
$\bar{a}_2 = 320$
$\bar{a}_3 = 480$

Celková kapacita strojov je 1280 hodín.

Potreba kapacít $\bar{b}_j$ je: $\bar{b}_1 = 150 \,.\, 4 = 600$
$\bar{b}_2 = 360$
$\bar{b}_3 = 260$

Celková potreba je 1220 hodín. Ide teda o nevybilancovanú úlohu s prebytkom kapacít. Ak účelovou funkciou bude maximalizácia celkového zisku pri výrobe, hodinové zisky sa určia podľa vzťahov uvedených v modeli, napr.:

$$z_{11} = (200 - 150) = 50 \qquad \bar{z}_{11} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

$$\vdots$$

$$z_{33} = (300 - 280) = 20 \qquad \bar{z}_{33} = \frac{20}{2} = 10$$

Potom model úlohy môžeme zapísať:

$$12{,}5x_{11} + 17x_{12} + 15x_{13} + 7{,}5x_{21} + 13x_{22} + 25x_{23} + 12x_{31} + 12x_{32} + 10x_{33} = \max$$

A obmedzujúce podmienky:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 480$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 320$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 480$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 600$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 360$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 260$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots n); (i = 1, 2, \dots m)$$

Model možno formulovať za predpokladu, že činnosť predstavuje výrobu j-tého výrobku na i-tom stroji na úrovni x_{ij}, meranej v kusoch príp. hmotných či časových jednotkách.

1.5 ZOVŠEOBECNENIE DOPRAVNÉHO MODELU PRI RIEŠENÍ VÝROBNÝCH KAPACÍT

Komplikovanejší je problém, ak prácnosť $\mathbf{h}_{ij}$ **j**-tého výrobku je rozdielna na každom stroji. Úlohy tohto typu nemožno jednoducho previesť na dopravnú úlohu. Tento prevod je možný len za predpokladu, že výrobky potreby i kapacity sa prepočítajú na údaje za nominálny (dohovorený) výrobok.

Z hľadiska formulácie modelu je jednoduchšie, ak činnosť predstavuje výroba **j**-tého prvku pomocou **i**-tého stroja na úrovni $\mathbf{x}_{ij}$. Koeficienty účelovej funkcie tvorí zisk, resp. náklady na jednotku. V kapacitných ohraničeniach vystupujú kapacity strojov ako zdroj, pričom prácnosť $\mathbf{h}_{ij}$ vystupuje ako technický koeficient a plánovaná potreba je vyjadrená ako potenciál.

Vo všeobecnosti účelovú funkciu v týchto prípadoch môžeme zapísať nasledovne:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} . x_{ij} = \mathbf{max}$$

resp.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} . x_{ij} = \mathbf{min}$$

Kapacitné podmienky ako obmedzenia sú dané vzťahom:

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij} . x_{ij} \leq a_i . s_i \qquad \mathbf{(i = 1, 2, \dots m)}$$

Obmedzenia pre plánované množstvá požadovaných výrobkov možno vyjadriť vzťahom:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad \mathbf{(j = 1, 2, \dots n)}$$

Nutné sú aj triviálne obmedzenia nezápornosti vyjadrené vzťahom:

$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m); (j = 1, 2, \dots n)$

Príklad: V nadväznosti na predchádzajúci príklad (bez zmeny ostatných podmienok) je prácnosť výrobkov h_{ij} na jednotlivých strojoch rozdielna a je uvedená v tabuľke.

Tabuľka prácnosti h_{ij} (v hodinách)

Výrobok / Stroj	P_1	P_2	P_3
M_1	4	3	2
M_2	6	4	3
M_3	4	4	6

Úlohou je nájsť optimálny plán využitia strojového zariadenia pri výrobe jednotlivých výrobkov (x_{ij}). Máme zistiť, aký čas sa má príslušný stroj využívať pre výrobu daného výrobku. Tento problém musíme vyriešiť pre všetky stroje a výrobky. Ak za činnosť zvolíme výrobu j-tého výrobku na i-tom stroji na úrovni x_{ij}, riešenie problému môžeme zapísať nasledovne:

$$50x_{11} + 51x_{12} + 30x_{13} + 30x_{21} + 39x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 36x_{32} + 20x_{33} = \max$$

A obmedzujúce podmienky:

$$\begin{aligned}
4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} &\leq 480 \\
6x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} &\leq 320 \\
4x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} &\leq 480 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 150 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 120 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 130
\end{aligned}$$

$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3); (j = 1, 2, 3)$

1.6. Priraďovacie úlohy

S distribučnými procesmi súvisia priraďovacie procesy, ktoré vznikajú, ak práve **m** zdrojov treba priradiť **n** činnostiam, pričom sú známe náklady, prípadne výnosy, ktoré vznikajú priradením istého zdroja *j*-tej činnosti.

Modely slúžiace na riešenie priraďovacích problémov vedú k priraďovacej úlohe, ktorú všeobecne možno zapísať takto:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} = \min$$

Za podmienok:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2 \dots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,2....n)$$

Ide teda o taký špeciálny prípad dopravnej úlohy, kde všetky $a_i = 1$ a všetky $b_j = 1$. Z každého riadku i stĺpca treba vytvoriť práve jedno číslo rovné 1. Priraďovacie problémy možno objasniť pomocou nasledujúcich úloh.

1. **Úloha o priradení odberateľov dodávateľom**. Treba priradiť ***n*** odberateľov ***m*** dodávateľom, ak sú známe dopravné náklady c_{ij}. Spôsob pradenia má zabezpečiť minimálne celkové dopravné náklady.

Príklad: V rámci plánovania vzťahov medzi odberateľmi a dodávateľmi treba priradiť 3 odberateľov (S_j) 3 dodávateľom (V_i) tak, aby celkové dopravné náklady boli minimálne. Dopravné náklady sú uvedené v tabuľke:

Dodávateľ / Odberateľ	S_1	S_2	S_3
V_1	3	7	8
V_2	3	8	7
V_3	9	6	8

Úlohu možno zapísať v tvare:

$$3x_{11} + 7x_{12} + 8x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 7x_{23} + 9x_{31} + 6x_{32} + 8x_{33} = \min$$

za podmienok:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$
$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = (1,2.......m)\ ;\ (= 1,2,......n)$$

2. **Zovšeobecnený model**. Ak v predchádzajúcom príklade maticu nákladov $\mathbf{c_{ij}}$ interpretujeme ako maticu pracnosti výrobku pri obsadzovaní ***i***-teho stroja ***j***-tou prácou, zápis úlohy bude obdobný ako v predchádzajúcom príklade.

3. **Úloha o rozmiestňovaní zamestnancov.** Teba rozmiestiť uchádzačov o zamestnanie na **n** pracovných miest. Vhodnosť ***i***-teho zamestnanca zastávať ***j***-té miesto sa boduje určitým počtom bodov (**a**).

Príklad: Maticu z predchádzajúceho príkladu interpretujme ako ocenenie uchádzačov V_1, V_2, V_3 zastávať miesto S_1, S_2, S_3. Treba rozmiestniť uchádzačov tak, aby celkové ocenenie bolo maximálne.

Zápis úlohy bude obdobný ako v prvom prípade priraďovania odberateľov a dodávateľov, iba účelová funkcia má nadobúdať **maximum.**

1.7. Zovšeobecnené dopravné úlohy pri riešení plánovacích problémov v poľnohospodárstve:

Iný variant vzniká ak namiesto pracnosti h_{ij} poznáme produktivitu (výrobu na jednotku času) $\alpha_{i,j}$ Algoritmus takýchto úloh je charakteristický pre plánovanie predovšetkým v poľnohospodárstve. V skutočnosti úlohy tohto charakteru sú dynamické, lebo výnosy kultúr sú závislé od času. Vo všeobecnosti úlohy tohto charakteru môžeme napísať následovne:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \cdot x_{ij} = \max \qquad \text{alebo} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} = \min$$

Za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad (i = 1,2 \ldots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i\,j} . x_{ij} = b_j$$

$$x_i \ge 0 (i = 1,2 \ldots. m); (j = 1,2 \ldots. n)$$

Príklad: Poľnohospodársky podnik má k dispozícií pôdu bonity A 100 ha a bonity B 80 ha a na nich vysiať 3 kultúry K_1, K_2, K_3 .Ďalšie údaje sú uvedené v tabuľke:

Kultúra	Náklady c_{ij}			Priemerné ha výnosy α_{ij}		
Osevná plocha	K_1	K_2	K_3	K_1	K_2	K_3
A	17000	15000	15000	3,1	2,5	2,8
B	19000	14000	16000	2,8	2,0	2,4
Plán potreby b_j	30	25	15			
Cena C_{Nj}	10000	8000	3000			

Činnosťou je osev i-tej plochy j-tou kultúrou vo výmere x_{ij} ha . Ak za cieľ zvolíme minimalizáciu nákladov, úlohu možno zapísať v tvare:

$$17000 x_{11} + 15000 x_{12} + 15000 x_{13} + 19000 x_{21} + 14000 x_{22} + 16000 x_{23} = \min$$

Za podmienok:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{33} \leq 80$$
$$3{,}1_{11} + 2{,}8x_{21} = 30$$
$$2{,}5x_{12} + 2x_{22} = 25$$
$$2{,}8x_{13} + 2{,}4x_{23} = 15$$
$$x_{i,j} \geq 0(i = 1,2...m);(j = 1,2...n)$$

2. Statické alokačné modely technologických procesov

2.1 Statické alokačné modely technologických procesov zmiešavania

Druhou veľkou oblasťou aplikácie alokačných modelov, založených na lineárnom pogramovaní v podniku, je optimalizácia priebehu technologických procesov. Z hľadiska modelovania je dôležité členenie technologických procesov na:

- ***Skladobné*** (pri ktorých výrobok vzniká postupným zmiešavaním, resp. premiešavaním prvkov).
- ***Technológie s voľnou substitúciou*** (výrobok možno vyrobiť z rôznych surovín s odlišnými špecifickými potrebami)
- ***Technológie so združenou surovinou*** (viac kusov výrobkov rôznej veľkosti sa vyrába z daného množstva surovín, najmä strihaním, rezaním, vykrajovaním a podobne)

Pre modelovanie skladobných technológií do úvahy prichádzajú maticové modely, modely založené na teórii grafov, prípadne už uvedené typy alokačných modelov. Na modelovanie zmiešavacích technológií sa požívajú osobitné typy alokačných modelov. Možno poznamenať že tieto modely formulované ako úlohy lineárneho programovania , predstavujú zovšeobecnenie úloh tzv. zmiešavacieho počtu.
Jeden typ problémov zmiešavania vzniká, ak ide o miešanie viacerých zmesí, z ktorých treba vytvoriť výslednú zmes, pri ktorej je známy požadovaný percentuálny i váhový pomer jednotlivých zložiek. Známa je cena jednotlivých východiskových zmesí a cieľom je vytvoriť požadovanú výslednú zmes čo najlacnejšie. Činnosťou je premiešavanie určitej východiskovej zmesi v hľadanom pomere. Model má tvar úloh lineárneho programovania Ohraničenia sa vyjadrujú pri každej zlúčenine ako pomer zložiek k predpísanému obsahu zložky vo výslednej zmesi. Ďalší typ ohraničenia musí zabezpečovať bilančný vzťah primiešavaných množstiev a požadovaného množstva výslednej zmesi. Úlohu spolu s ohraničeniami možno formulovať následne:

Účelová funkcia má tvar:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \cdot x_i = \min$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_i \cdot x_i = b_j} \quad (\mathbf{j=1,2.....n})$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_i = 1} \quad \text{alebo } 100 \text{ (ak uvažujeme v \%)}$$

$$\mathbf{x_i \geq 0}$$

Pri konkrétnom prípade výpočtu požadovaného množstva sa $\sum \mathbf{x_i}$ musí prispôsobiť $\sum \mathbf{b_j}$ a vtejto relacií upraviť vzťahy v obmedzujúcich podmienkach.

Príklad: Zo zmesi A,B,C,D so zložením uvedených v tabuľke treba vyrobiť výslednú zmes V s minimálnymi nákladmi.

Zmes Zložky	A	B	C	D	Výsledná zmes
% olova	30	20	35	40	25
% zinku	30	10	35	20	30
% cínu	40	70	30	40	35
Cena	700	400	600	500	

Príslušnú úlohu možno zapísať nasledovne:

$$700x_1 + 400x_2 + 600x_3 + 500x_4 = \min$$

za podmienok:

$$\begin{aligned}
0{,}30x_1 + 0{,}20x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}40x_4 &= 0{,}25 \\
0{,}30x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}20x_4 &= 0{,}45 \\
0{,}40x_1 + 0{,}70x_2 + 0{,}40x_3 + 0{,}40x_4 &= 0{,}45 \\
x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 &= 1
\end{aligned}$$

$$x_i \leq 0 \qquad (i = 1,2...4)$$

Možno predpísať aj výrobcu iného ako jednotlivého množstva zmesi, potom však úmerne treba upraviť aj predpisované podiely zložiek. Preto, ak by sa v príklade vyžadovalo vyrobiť 200t výslednej zmesi, na pravej strane rovníc je potrebné predpísať 50t olova, 60t zinku a 90t cínu a pravá strana $\sum x_i = 200$t.

Úloha o zmiešavaní môže vystupovať aj v jednoduchšej forme a možno predpísať len obsah jednej zložky. Problém zmiešavania môže byť modifikovaný aj vtedy, ak ide o miešanie rôznych druhov látky, ktoré sa líšia určitou kvantifikovateľnou vlastnosťou, napr. tekutiny rôznej teploty, druhy benzínu s rôznymi oktánovými číslami a pod. Úloha sa nelíši od predchádzajúcich, požadované množstvo však má byť jednotkové.

Príklad: Zo 4 druhov benzínu s oktánovým číslom 76,79,83,85 treba vyrobiť zmes 80oktanového benzínu. Ceny 1 l jednotlivých druhov sú 35.8; 37.90; 38.50; 39.30 Sk. Úlohu možno zapísať v tvare:

$$35{,}8x_1 + 37{,}9x_2 + 38{,}5x_3 + 39{,}3x_4 = \min$$

za podmienok:

$$76x_1 + 79x_2 + 83x_3 + 85x_4 = 80$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_i \geq 0 \quad (\, i = 1,2 \ldots 4 \,)$$

Iný typ úlohy o zmiešavaní je tzv. úloha pre spojité technológie. V tomto prípade ide o „ miešanie technologických procesov „ vyjadrené chodmi, časom prevádzkovania a pod. Úloha je príbuzná so základným modelom plánovania výroby.

Príklad: Pri výrobe benzínu sa používajú dva typy technológie. Spotreba (vstup) druhov ropy a výroba (výstup) jednotlivých druhov benzínu sú uvedené v tabuľke:

Proces	Spotreba			Výroba		Zisk
	Ropa A	Ropa B	Ropa C	Benzín 1	Benzín 2	
a	10	11	9	7	6	15
b	10	9	8	5	6	16
Množstvo	200	190	210	180	170	

Zápis úlohy je nasledovný:

$$15x_1 + 16x_2 = \max$$

za podmienok:

$$10x_1 + x_2 \leq 200$$
$$11x_1 + 9x_2 \leq 190$$
$$9x_1 + 8x_2 \leq 210$$
$$7x_1 + 5x_2 \leq 180$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 170$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Zmiešavanie je charakteristické aj pri tzv. probléme výživy, kde ide o určenie optimálnej skladby krmív alebo potravín tak, aby dávka obsahovala predpísané množstvo živín pri minimálnych celkových nákladoch. Pritom môže ísť o skladbu jedálneho lístka, plánu výživy, receptúry krmnej zmesi a pod. Živiny predstavujú obsah bielkovín, uhľohydrátov, tukov, vitamínov, hodnoty kilojouov a pod. Koeficienty $\mathbf{a_{ij}}$ predstavujú obsah **i**-tej živiny v jednotke **j**-tej krmoviny. Činnosť predstavuje určenie množstva príslušnej krmoviny v jedálnom lístku a pod. Všeobecne môžeme úlohu zapísať nasledovne:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{c_i \cdot x_i = min}$$

za podmienok:

$$\sum \mathbf{a_{ij} \cdot x_i = b_j}$$

$$\mathbf{x_i \geq 0}$$

Príklad: Treba zostaviť jedálny lístok (vyrobiť kŕmnu zmes) z dvoch potravín (krmovín) s ohľadom na množstvo uhľohydrátov, energie a vitamínu B. Údaje o obsahu živín, o potrebnom minimálnom množstve živín a o cenách jednotky potraviny (krmoviny) sú v tabuľke.

Potravina / Živina	1.	2.	Min. množstvo
Uhľohydráty v [g]	20	20	80
Energia v [J]	10 000	4 000	20 000
Vitamín B [jed.]	2	5	10
Cena	200	300	

Uvedená úloha má nasledovný tvar:

$$200x_1 + 300x_2 = \min$$

za podmienok:

$$20x_1 + 20x_2 \geq 80$$
$$10\,000x_1 + 4\,000x_2 \geq 20\,000$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

2.2 Modelovanie technologických procesov strihania

Problém optimalizácie pri technológiách so združenou surovinou vedie k problému rezania (minimalizácia odpadu pri rezaní, počtu rezaní či dĺžke rezných plôch). Ide napr. o vyrezávanie plechov na požadované tvary, strihanie látok pri výrobe odevov, rezanie betonárskej ocele a pod. Vychádza sa z toho, že príslušná surovina, resp. polovýrobok sa dodáva v štandardných rozmeroch (ploche, dĺžke a pod.) Z nej treba vystrihnúť rôzne požadované kusy určitých typov. Dodaný polovýrobok možno rezať na požadované kusy rôznymi spôsobmi, ktoré sú spojené s rôznou veľkosťou odpadu. Výber týchto rezných spôsobov je činnosťou v príslušnom modeli na úrovni počtu kusov polovýrobku, rezaného rovnakým rezným spôsobom. Účelovou funkciou môže byť minimalizácia odpadu reznej plochy, počtu rezných kusov polovýrobku alebo dĺžke rezu.

Činnosť sa pritom definuje ako rezanie **i**-teho druhu dodávaného polovýrobku **j**-tým rezným spôsobom na úrovni x_{ij}. Jednotlivé rezné spôsoby možno číslovať aj priebežne bez ohľadu na druh dodávaného polovýrobku. Činnosti potom predstavujú len rezné spôsoby na úrovni x_i. Ako alternatívna účelová funkcia prichádza do úvahy minimalizácia rezaných množstiev x_{ij}, resp. x_i. Všeobecne úlohu môžeme zapísať nasledovne:

$$\sum c_{ij} \cdot x_{ij} = \min$$

za podmienok:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_{ij} = b_j \qquad j = (1,2....n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1,2......m); \; (j = 1,2.....n)$$

Príklad: Závod potrebuje oceľové tyče dĺžky 1,5m (300ks), 2m (200ks) a 3m (100 ks). Vyrába ich rezaním z dodávaných tyčí dĺžky 5m a 8m. Pri rezaní 5m tyči sa používajú 3, pri rezaní 8m tyčí 6 rezných spôsobov. Počet kusov získaných pri jednotlivých rezných spôsobov a odpad je uvedený v tabuľke. Úlohou je narezať potrebný počet tyčí tak, aby odpad bol minimálny.

Dodávané tyče / Rezné spôsoby	5 m			8 m						Potreba
	1.	2.	3.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
Požadované dĺžky 1,5m	3	2	-	5	4	2	1	-	-	300
Požadované dĺžky 2m	-	1	1	-	1	1	-	4	1	200
Požadované dĺžky 3m	-	-	1	-	-	1	2	-	2	100
Odpad v (m)	0,5	0	0	0,5	0	0	0,5	0	0	

Úlohu možno zapísať nasledovne:

$$0{,}5x_{11} + 0{,}5x_{21} + 0{,}5x_{24} = \min$$

za podmienok:

$$3x_{11} + 2x_{12} + 5x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} + 1x_{24} = 300$$
$$1x_{12} + 1x_{13} + 1x_{22} + 1x_{23} + 4x_{25} + 1x_{26} = 200$$
$$1x_{13} + 1x_{23} + 2x_{24} + 2_{26} = 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2);\ (j = 1,2,3)$$

3.1 Dynamické alokačné modely v riadení podnikov

Dôležitú triedu alokačných modelov tvoria modely rozdelenia činnosti v čase. Vyskytujú sa v s problémami, kde sa navzájom súvisiace činnosti uskutočňujú v rôznych obdobiach (časových intervaloch), pričom príslušné veličiny sa v jednotlivých obdobiach menia. Ide pritom o dynamické alokačné modely. Označujú sa ako dynamizované, prípadne dynamické modely lineárneho programovania.

Zásadne každý model lineárneho programovania možno zovšeobecniť na dynamizovaný model. Každej činnosti, ktorá vystupuje v statickom modeli zodpovedá **T** činnosti v dynamizovanom modeli (kde **T** počet období). Namiesto n premenných statického modelu v dynamizovanom modeli je aspoň **T.n** premenných.
Ďalším problémom dynamizovaných problémov lineárneho programovania je zabezpečenie požadovaných vzťahov medzi jednotlivými hodnotami premennej v čase.

Predpokladajme, že je potrebné zabezpečiť optimálne množstvo nákupu na sklad neohraničene skladovateľnej suroviny na určité obdobia, pričom spotreba za obdobie $\mathbf{d}_t$ a nákupná cena C_{Nt} sa v každom období mení. Ostatné veličiny nie sú závislé od obdobia. Treba určiť množstvo $\mathbf{h}_t$, ktoré treba nakúpiť na začiatku každého obdobia tak, aby celková nákupná cena bola minimálna. Spotreba počas obdobia je $\mathbf{d}_t$.

Na začiatku každého obdobia je začiatočná zásoba $\mathbf{s}_t$. Po doplnení zásoby $\mathbf{s}_t$ nakupovaným množstvom $\mathbf{h}_t$ dostávame hladinu zásob $\mathbf{x}_t$, teda platí:

$$x_t = s_t + h_t$$
$$t = 1,2 \ldots T$$

Problém si vyžaduje, aby sa vylúčila možnosť vyčerpania zásob (deficit). Bilančný vzťah, ktorý vylúči deficit je:

$$s_{t+1} = x_t - d_t$$
$$t = 1,2 \ldots T$$

Dynamický bilančný vzťah možno formulovať aj v tvare, ktorý je vhodný aj na určenie vyhovujúcich pomerov medzi hodnotami premenných v jednotlivých obdobiach:

$$x_{t+1} \geq x_t - d_t$$

Teda $x_t - x_{t+1} \leq d_t$

$$t = 1,2......T$$

Ďalej zrejme platí:

$$x_t \geq d_t$$
$$t = 1,2....T$$

Okrem toho môžu platiť aj iné ohraničenia premenných. Napríklad hladina zásob $\mathbf{x_t}$ nesmie prekročiť kapacitu vkladov K_s.

$$x_t \leq K_s$$
$$t = 1,2..........T$$

Model možno formulovať ako dynamizovanú úlohu lineárneho programovania, ktorý pre každé obdobie pozostáva z uvedených nerovníc a účelovej funkcie:

$$\sum C_{Nt}.x_t = \min$$

za podmienok

$$x_t \geq d_t$$
$$x_t - x_{t+1} \leq d_t$$
$$x_t \leq K_s$$
$$x_t \geq 0$$
$$t = 1,2....T$$

Príklad: Podnik má zabezpečiť optimálne množstvo nákupu na sklad neohraničene skladovateľnej suroviny na 4 obdobia. Spotreba na obdobie a nákupná cena za príslušné obdobie sú uvedené v tabuľke:

Obdobie t	1	2	3	4
Spotreba d_t	800	250	150	200
Cena C_{Nt}	30	50	35	45

Počiatočná zásoba je 300 a konečná zásoba na konci 4. obdobia sa má rovnať 0. Kapacita skladu je ohraničená na 900 jednotiek. Určite plán optimálneho nákupu na sklad za sledované obdobia.

Účelová funkcia:

$$30x_1 + 50x_2 + 35x_3 + 45x_4 = \min$$

pri

podmienkach:

$x_1 \geq 800$

$x_1 \leq 900$

$x_1 - x_2 \leq 800$

$x_2 \geq 250$

$x_2 \leq 900$

$x_2 - x_3 \leq 250$

$x_3 \geq 150$

$x_3 \leq 900$

$x_3 - x_4 \leq 150$

$x_4 \geq 700$

$x_4 \leq 900$

$x_t \geq 0$

$t = 1,2,3,4$

3.2 Zovšeobecnená dynamická úloha plánovania výroby a zásobovania

Zovšeobecnením predchádzajúcej dynamickej úlohy o zásobovaní je úloha o plánovaní výroby a zásobovania. Vzniká v súvislosti s riadením výroby, keď sa spotreba a výroba v jednotlivých obdobiach nerovná. Dané sú náklady výroby $\mathbf{c_{yt}}$ a skladovania $\mathbf{c_{st}}$ za jednotlivé obdobia, ktoré sa vo všeobecnosti líšia pre jednotlivé obdobia. Úlohou je určiť výšku výroby a zásob za jednotlivé obdobia tak, aby celkové náklady výroby a skladovanie boli minimálne.

Množstvo vyrábané v období t označené v tomto modeli ako $\mathbf{x_t}$. Začiatočná zásoba v období t je s_{t-1}, konečná zásoba s_t a spotreba d_t.

Dynamická bilančná rovnica pre obdobie $\boldsymbol{t}$ je:

$$\boldsymbol{s_{t-1} + x_t \geq d_t}$$

resp.

$$\boldsymbol{s_{t-1} + x_t - s_t = d_t}$$

Jednoduchý variant tohto modelu predpokladá, že počiatočná zásoba na začiatku $\boldsymbol{s_0 = 0}$, v ostatných obdobiach sa počiatočná a konečná zásoba nerozlišuje. Aj zásoba na konci obdobia $\boldsymbol{s_t = 0}$.

Úlohu potom môžeme zapísať:

$$\boldsymbol{\sum_{t=1}^{T} c_{yt}.x_t + c_{st}.s_t = \min}$$

pri obmedzeniach:

$$x_t - s_t \geq d_t$$
$$s_t \geq K_s$$
$$x_t \geq 0$$
$$t = 1,2 \ldots T$$

Príklad: Úlohou je určiť výšku výroby a zásob na 4 obdobia na základe údajov uvedených v tabuľke:

Obdobie	1.	2.	3.	4.
Odbyt (v jed.)	5	6	8	6
Výrobné náklady	4	3	2	5
Skladov. náklady	1,5	1,5	1,5	1,5

Predpokladá sa pritom, že sa skladujú zásoby st, pričom kapacita skladu je ohraničená na 10 jednotiek

Účelová funkcia má tvar:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 1{,}5s_1 + 1{,}5s_2 + 1{,}5s_3 + 1{,}5s_4 = \min$$

za podmienok:

$$x_1 - s_1 \geq 5$$
$$x_1 + x \quad - s_2 \geq 11$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - s_3 \geq 19$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$
$$s \quad \leq 10$$
$$s_2 \leq 10$$
$$s_3 \leq 10$$
$$x_t \geq 0; s_t \geq 0$$
$$t = 1,2,3,4$$

Zložitejší variant tejto úlohy predpokladá, že model má poskytovať informácie o raste alebo poklese výroby medzi dvoma ľubovoľnými po sebe nasledujúcimi obdobiami vyjadrený ako rozdiel $x_t - x_{t-1}$ pričom:

$$x_t - x_{t-1} \leq y_t - z_t$$

kde $y_t > 0$ je rast $y_t < 0$ pokles výroby (súčasne sa od nuly líši len jedna z nich). Za známe sa často považujú náklady pri zvýšení výrob c_{yt}. Model sa potom skladá z účelovej funkcie:

$$c_{yt} \sum_{t=1}^{n} y_t + c_{st} \sum_{t=1}^{n} s \; = \min$$

a nerovníc:

$$s_{t-1} + x_t - s_t \geq d_t$$
$$x_t - x_{t-1} \leq y_t - z_t$$

a z podmienok nerovnosti:

$$x_t \geq 0$$
$$t = 1,2...n$$

Úloha o plánovaní výroby a zásob je špeciálnym prípadom tzv. úlohy o vyrovnávaní výroby. Na riešenie sa uvádzajú okrem metód lineárneho programovania aj nelineárne programovanie, dynamické programovanie a osobitné rozhodovacie pravidlá.

4.Elementárne modely zásob

Riadením zásob sa venovala v oblasti operačného výskumu najväčšia pozornosť. Už v roku 1915 HARRIS zostavil „rovnicu optimálnej veľkosti série" na určenie minima súčtu nákladov na skladovanie (a nákladov na prípravu výroby) v prípade, že dopyt je známy a stály.

Skôr ako sa budeme zaoberať modelmi procesov zásobovania a ich riešením, treba zdôrazniť, že žiadny z modelov, ktoré budú uvádzané nemožno priamo aplikovať na každú konkrétnu situáciu. Manažér však môže urobiť príslušné modifikácie daného modelu, ak pochopí, ako sa takéto modely tvoria. Všeobecné úlohy, ktorými sa budeme zaoberať obsahujú rozhodovania, ktoré sa týkajú výšky zásob. Tieto rozhodovania možno rozdeliť takto:

Je daný termín, kedy treba objednať tovar a treba určiť množstvo, ktoré sa má objednať.
Treba určiť objednané množstvo a termín objednávky.

Cieľom úloh je nájsť spôsob, ako dosiahnuť optimálne rozhodnutia. Optimálne rozhodnutia budú také, pri ktorých náklady spojené so zásobami budú optimálne. Náklady spojené so zásobami sú trojaké:

1. Náklady na obstaranie tovaru nákupom alebo výrobou (tzv. obstarávacie náklady). Tieto náklady vzhľadom na série sú fixné, vzhľadom na jednotku premenlivé.
2. Priame jednotkové náklady obsahujú také zložky, ako napr. čisté kapitálové náklady, náklady na uskladnenie, manipuláciu, morálne opotrebovanie, poškodenie, poistenie, dane.
3. Náklady, ktoré vyplávajú z nedostatku zásob a vznikajú alebo tým, že nemožno vyhovieť dopytu v danom časovom termíne (odkladom), alebo že nemožno dopytu vyhovieť vôbec.

Tieto náklady môžu byť konštantné alebo môžu meniť závislosti od času (napr. náklady z nedostatku zásob počas jedného obdobia, môžu byť iné ako počas iného obdobia), môžu tak isto závisieť od množstva jednotiek (napr. náklady na skladovanie sa môžu meniť podľa počtu skladovacích jednotiek).

Okrem premenných veličín, ktoré súvisia s nákladmi, vyskytujú sa v úlohách skladovania ešte dve ďalšie veľké skupiny premenných:

- Premenné dopytu. Dopyt môže byť známy, alebo neznámy, môže byť alebo konštantný, alebo sa môže meniť v čase. Množstvo požadovaného tovaru môže byť veličinou diskrétnou alebo spojitou. Napokon aj intenzita odberu môže byť konštantná, alebo sa môže meniť v závislosti od času.
- Objednávkové premenné. Dodania lehota (t.j čas, ktorý uplynie medzi objednávaním a dodaním objednaného tovaru) môže byť prakticky zanedbateľná, alebo môže tvoriť určitý čas. Termíny, v ktorých objednávky dochádzajú, môžu byť fixné alebo premenlivé. Vyskladňovanie tovaru môže prebiehať v množstvách, ktoré sa menia diskrétne, alebo spojité a okrem toho môžu byť konštantné alebo premenlivé. Aj prísun tovaru môže byť spojitý a nespojitý a tiež konštantný alebo premenlivý.

V skutočnosti sa môžu vyskytovať ďaleko viac premenlivých činiteľov ich charakteristiky sú zostavené v tabuľke.

1. Obstarávacie jednotkové náklady 2. Náklady na skladovanie za jednotkový čas	a) stále b) premenlivé	
3. Náklady z nedostatku zásob		
4. Dopyt	a) známy b) odhadnutý	a) stály b) premenlivý
5. Dodávané množstvo	a) diskrétne jednotky b) spojité množstvá	
6. Časové rozdelenie vyskladnenie	a) spojité b) nespojité	a) stála rýchlosť b) premenlivá rýchlosť
7. Dodacia lehota	a) dodacia lehota b) väčšia ako nula	
8. Dodávací cyklus	a) známy b) odhadnutý	a) stály b) premenlivý
9. Veľkosť prebierky	a) diskrétna b) spojitá	a) stála b) premenlivá
10. Časové rozdelenie prebierok	a) diskrétna b) spojitá	a) stála rýchlosť b) premenlivá rýchlosť

V modeloch sa vyskytujú tieto premenné:

C_1 – náklady na skladovanie na jednotku tovaru a času
C_2 – náklady z nedostatku zásob
C_3 – náklady na prípravu výroby jednej série
TEC – celkovo očakávané náklady
TECo – Minimálne (optimálne) celkové náklady
q – prebierka objednaného, prípadne vyrobeného množstva
Ts – dodávkový cyklus (v časových jednotkách)
S – veľkosť zásoby na sklade

q_o; t_{so};S_o – optimálne množstvo a čas
P(r) – pravdepodobnosť, že sa bude vyžadovať r jednotiek
F(r) - funkcia hustoty pravdepodobnosti r
P (r ≤ s) – pravdepodobnosť dopytu na najviac S jednotiek
F (r) – súčtová pravdepodobnosť
T – dodacie obdobie
R – celkové dodacie množstvo počas obdobia T

4.1 Model zásob pri stálom a známom dopyte

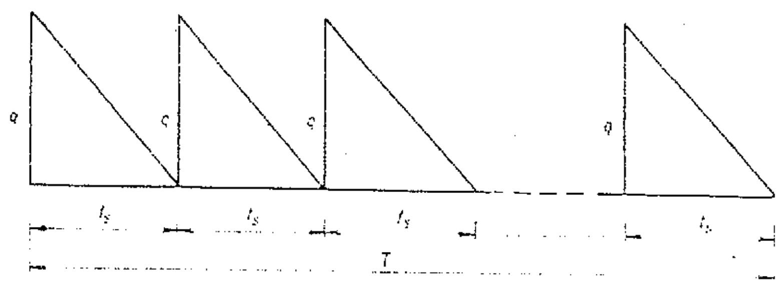
Predpokladajme, že výrobca počas obdobia **T** má rovnomerne dodať **R** jednotiek svojim zákazníkom. Dopyt je teda známy a stály. Nepripúšťa sa neplnenie dodávok. Z toho vyplýva, že náklady z neplnenia dodávok sú nekonečné ($C_2 = \infty$). Premenlivé náklady spojené s výrobným procesom sú:

C_1- náklady na skladovanie jednej jednotky

C_2- náklady na prípravu výrobnej série

Úlohou výrobcu je určiť:

1. Ako často treba opakovať výrobnú sériu.
2. Koľko jednotiek treba v jednej sérii vyrobiť.



Zásobovacia situácia pre model

Opisovaná situácia je znázornená na obrázku. Nech **q** je veľkosť série, $\mathbf{t_s}$ výrobný cyklus a **R** celkový dopyt v plánovanom období **T.** Potom:

$\frac{R}{q}$ =počet sérií počas obdobia T a $t_s = \frac{T}{\frac{R}{q}} = \frac{Tq}{R}$

Ak interval $\mathbf{t_s}$ začína s **q** jednotkami v sklade a končí s nulovým množstvom, vtedy

$\frac{q}{2}$ = priemerná zásoba počas t_s

$\frac{q}{2}.C_1t_s$ = náklady na skladovanie počas t_s

Celkové očakávané priame náklady na výrobnú sériu sa potom budú skladať z nákladov na skladovanie a nákladov na prípravu výroby C_3, t.j.

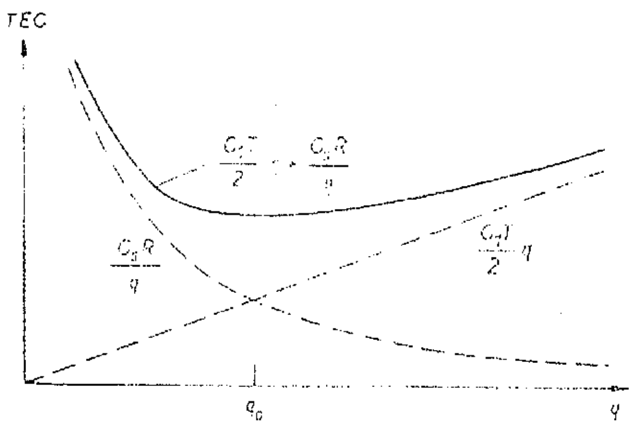
$$C_3=\left(\frac{q}{2}\right).C_1t_s+C_s$$

Napokon **TEC** za čas T budú súčinom nákladov na jednu sériu a počtu sérií za obdobie T.

$$TEC=\left(\frac{q}{2}.C_1t_s+C_s\right).\frac{R}{q}$$

Dosadením t_s dostaneme:

$$TEC=\left(\frac{q}{2}.C_1.\frac{Tq}{R}+C_s\right)\frac{R}{q}=\frac{C_1Tq}{2}+\frac{C_sR}{q}$$



Určenie q_0 v modeli

Riešenie tejto zásobovacej úlohy je v tom, že nájdeme hodnotu **q** (množstvo, vyrábané v jednej sérii), pri ktorej súčet nákladov oboch druhov je minimálny. Hľadanú hodnotu označíme q_0.

Vypočítame prvú deriváciu a položíme ju rovnú nule:

$$\frac{dTEC}{dq}=\frac{1}{2}C_1T-\frac{C_sR}{q^2}=0 \qquad \Rightarrow q_0=\sqrt{\frac{2RC_s}{TC_1}}$$

$$t_{s0}=\sqrt{\frac{2TC_s}{RC_1}} \quad \text{a} \quad TEC_0=\sqrt{2RTC_1C_s}$$

Príklad: Výrobca má dodať zákazníkovi ročne 24 000 kusov svojho výrobku. Tento dopyt je známy a stály. Náklady a neplnenie dodávky v tomto prípade treba považovať za nekonečné (nemôžu vôbec vzniknúť). Náklady na skladovanie sú 10 Sk na jednotku a mesiac a náklady na prípravu výrobnej série sú 35 000 Sk.

Treba nájsť optimálnu veľkosť série q_0, zodpovedajúci optimálny výrobný cyklus t_{s0} a minimálne očakávané náklady TEC_0.

V tomto prípade je:

T = 12 mesiacov

R = 24 000 jednotiek

C_1 = 10 Sk za mesiac

C_s = 35 000 na sériu

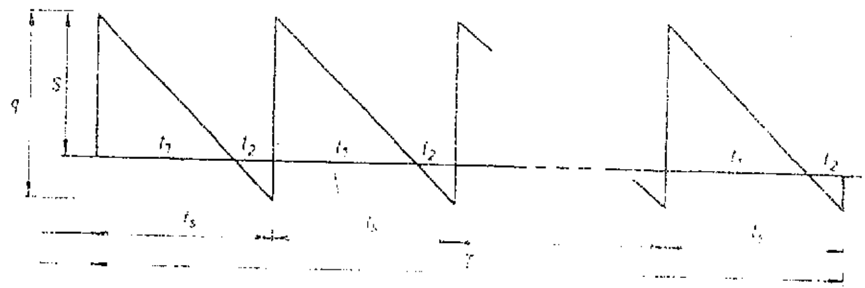
$$q_0=\sqrt{\frac{2*24000*35000}{12*10}}=3742 \text{ jednotiek v sérii}$$

$$t_{s0}=\sqrt{\frac{2*12*35000}{24000*10}}=1{,}87 \text{ mesiaca}$$

$$TEC_0=\sqrt{2(24000*12*10*35000)}=448\ 999 \text{ Sk za rok}$$

4.2. Model zásob pri stálom a známom dopyte a pri nákladoch z neplnenia dodávky

Táto úloha je podobná ako predchádzajúca iba s tým rozdielom, že v tomto prípade možno pripustiť náklady z neplnenia dodávky (to znamená, že náklady z neplnenia dodávky nie sú nekonečné). Túto situáciu zásobovania možno graficky znázorniť nasledovne:



S je výška zásob na začiatku každého intervalu. Použitím vety o geometrickej podobnosti trojuholníkov zistíme, že platí:

$$t_1 = \frac{S}{q}.t_s \qquad t_2 = \frac{q-S}{q}.t_s$$

Priemerný počet jednotiek, ktoré sú v zásobách je **S/2.**

Preto $\frac{S}{2}C_1t_1$ = priemerné náklady na skladovanie počas t_1.

Priemerný počet chýbajúcich jednotiek počas t_2 je $\frac{q-S}{2}$

Preto $\frac{q-S}{2}.C_2t_2$ = priemerné náklady z neplnenia dodávky počas t_2.

Na základe toho možno vyjadriť celkové očakávané náklady počas **T** takto:

$$TEC(q,S) = \left(\frac{S}{2}.C_1t_1 + \frac{q-S}{2}.C_2t_2 + Cs\right)\frac{R}{q}$$

Dosadením výrazov pre t_1, t_2 a t_s a úpravách dostaneme :

$$TEC(S,q) = \frac{S^2C_1T}{2q} + \frac{(q-S)^2C_2T}{2q} + \frac{C_SR}{q}$$

Riešenie tejto zásobovacej úlohy je v tom, že nájdeme hodnotu **q** a S, pri ktorých je súčet nákladov všetkých troch druhov minimálny. Hľadanú hodnotu označíme q_0 a S_0.

Výpočet realizujeme cez prvú parciálnu deriváciu a položíme ju rovnú nule a po úpravách dostaneme :

$$q_0 = \sqrt{\frac{2RC_s}{TC_1}}.\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}} \qquad S_0 = \sqrt{\frac{2RC_s}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

$$t_{s0} = \sqrt{\frac{2TC_s}{RC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$$

$$TEC_0 = \sqrt{2RTC_1C_s}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

Príklad: Predpokladajme, že situácia je rovnaká ako v predchádzajúcom príklade, iba s tým rozdielom, že pripustíme náklady z neplnenia dodávky C_2 vo výške 20 Sk na jednotku a mesiac.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2*24000*35000}{12*10}} * \sqrt{\frac{10+20}{20}} = 4582 \text{ jednotiek v sérii}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{2*24000*35000}{12*10}} * \sqrt{\frac{20}{10+20}} = 3055 \text{ jednotiek v sérii}$$

$$t_{s0} = \sqrt{\frac{2*12*35000}{24000*10}} * \sqrt{\frac{10+20}{20}} = 2{,}29 \text{ mesiaca}$$

$$TEC_0 = \sqrt{2*24000*12*10*35000} * \sqrt{\frac{20}{10+20}} = 366\,606 \text{ Sk}$$

4.3. Modely zásob pri nedostatku zásob (penále, výpadok výroby)

V úlohách tohto druhu ide o neplnenie dodávok z dôvodov nedostatku zásob. Okrem tejto charakteristiky sa v modeloch vyskytujú tieto pojmy:

- Odhadnutý premenlivý dopyt a prísun
- Diskrétne jednotky množstva
- Nespojité časové vyskladňovanie a prísun nespojitou rýchlosťou
- Známy a stály dodávkový cyklus

Modely tohto charakteru možno uplatniť v prípadoch, keď je potrebné platiť penále alebo vznikajú straty výroby v dôsledku nedostatku materiálu. Rovnicu nákladov (t.j. všeobecný model) pre úlohy tohto druhu možno zostaviť takto:

Predpokladajme, že z každého skladovaného množstva **S** sa použije **r** jednotiek materiálu. Pre dané obdobie náklady na skladovanie budú:

1. **(S – r).C₁, ak r ≤ S** (t.j. ak počet spotrebovaných jednotiek je menší alebo sa rovná množstvu na sklade).
2. **(r – S).C₂, ak r > S** (t.j. ak počet vyžadovaných jednotiek je menší, alebo sa rovná počtu jednotiek na sklade).

Nevieme, aké veľké bude **r**. Vieme však, že každej hodnote **r** prislúcha istá pravdepodobnosť výskytu **P(r)**. Očakávané náklady, ktoré prislúchajú istej hodnote **r** potom budú:

$P(r)\,(S - r).C_1$	**keď**	$r \leq S$	alebo
$P(r)\,(r - S).C_2$	**keď**	$r > S$	

Ak $r = S$, očakávané náklady sa rovnajú nule.

Keď chceme dostať celkové očakávané náklady, musíme sčítať všetky očakávané náklady t.j. tie, ktoré prislúchajú všetkým možným hodnotám **r**. Celkové očakávané náklady **TEC**, ktoré prislúchajú zásobe na sklade S jednotiek, sú dané touto rovnicou:

$$TEC(S) = C_1 \sum_{r=0}^{S} P_{(r)}(S-r) + C_2 \sum_{r=S+1}^{\infty} P_{(r)}(r-S)$$

Všeobecne pri jednotlivých úlohách treba zistiť, pri akej hodnote S (materiálu na sklade) budú celkové očakávané náklady **TEC** najnižšie, čo považujeme za optimálne riešenie skladovania príslušného materiálu.

Príklad: Podnik chce objednať nový generátor pre svoju elektráreň. Jeden zo základných dielcov generátora je veľmi zložitý a drahý a bolo by nepraktické objednávať ho samostatne, t.j. bez generátora. Každý z týchto dielcov je zostrojený osobitne pre daný generátor a nemožno ho použiť pre iný. Podnik potrebuje vedieť, koľko náhradných dielcov treba objednať spolu s generátorom, aby jeho prevádzka z hľadiska daného dielca bola optimálna.

K dispozícii máme tieto údaje: Náklady na uvedený dielec (ak sa objednáva spolu s generátorom) sú 5 000 Sk. Ak je potrebný náhradný dielec (v prípade, že sa poškodí ten, ktorý je v prevádzke) a na sklade nie je k dispozícii iný, je celý generátor nepoužiteľný. Náklady, ktoré vzniknú vyradením generátora z prevádzky spolu s nákladmi na nový, osobitne objednaný dielec generátora sú 1 mil. Sk. Prieskum poruchovosti podobných dielcov vedie k výsledkom, uvedeným v tabuľke.

Počet potrebných náhradných dielcov	Počet gener. ktoré vyžadujú uvedené množstvo náhradných dielcov	Odhad pravdepodobnosti výskytu uvedeného počtu porúch
0	90	0,90
1	5	0,05
2	2	0,02
3	1	0,01
4	1	0,01
5	1	0,01
6 a viac	0	0,00

Treba vypočítať, aké množstvo príslušných náhradných dielcov sa podniku oplatí nakúpiť, aby prevádzka a skladovanie príslušných dielcov bolo optimálne.

Potrebujeme vypočítať celkové očakávané náklady, ktoré prislúchajú ľubovoľnej reálnej zásobe na sklade. Uvedené údaje ukazujú, že pravdepodobnosť výskytu viac ako 5-tich porúch je nulová. Budeme predpokladať, že náklady v prípade, ak sa dielec nepoužije, sa rovnajú nákupnej cene (5000 Sk), pričom náklady na skladovanie budeme považovať za zanedbateľné. Za náklad budeme považovať iba ich nákupnú cenu (C_1 =5000 Sk). Ďalej budeme predpokladať, že náklady z nedodania dodávky C_2 sú 1 mil. Sk a skladajú sa z nákladov, vyvolaných odstavením generátora a z výrobných nákladov na osobitne vyrobený dielec.

Rovnice nákladov pre jednotlivé situácie na sklade budú nasledovné:

$$TEC(S=5)=5000[0{,}90(5-0)+0{,}05(5-1)+0{,}02(5-2)+0{,}01(5-3)+0{,}01(5-4)+0{,}01(5-5)]+$$
$$+1000000[0{,}00(6-5)]=23950Sk$$

$$TEC(S=4)=5000[0{,}90(4-0)+0{,}05(4-1)+0{,}02(4-2)+0{,}01(4-3)+0{,}01(4-4)]+$$
$$+1000000[0{,}01(5-4)+0{,}00(6-4)]=20000Sk$$

$$TEC(S=3)=5000[0{,}90(3-0)+0{,}05(3-1)+0{,}02(3-2)+0{,}01(3-3)]+$$
$$+1000000[0{,}01(4-3)+0{,}01(5-3)+0{,}00(6-3)]=17100Sk$$

$$TEC(S=2)=5000[0{,}90(2-0)+0{,}05(2-1)+0{,}02(2-2)]+$$
$$+1000000[0{,}01(3-2)+0{,}01(4-2)+0{,}01(5-2)+0{,}00(6-2)]=15250Sk$$

$$TEC(S=1)=5000[0{,}90(1-0)+0{,}05(1-1)]+$$
$$+1000000[0{,}02(2-1)+0{,}01(3-1)+0{,}01(4-1)+0{,}01(5-1)+0{,}00(6-1)]=15550Sk$$

$$TEC(S=0)=5000[0{,}90(0-0)]+$$
$$+1000000[0{,}05(1-0)+0{,}02(2-0)+0{,}03(3-0)+0{,}04(4-0)+0{,}01(5-0)+0{,}00(6-0)]=21000Sk$$

Z porovnania dokladov pri určitom počte dielcov na sklade vyplýva, že optimálny stav zásob na sklade sú dva náhradné dielce. Náklady sú najnižšie 15 250 Sk..

[illegible] pri nedostatku zásob (spojité množstvo)

Táto úloha je rovnaká, ako v predchádzajúcej časti, len s tým rozdielom, že namiesto diskrétnych veličín (počet dielcov) máme teraz spojité premenlivé množstvo. Pravdepodobnosť výskytu objednávky na počet kusov v rozpätí r_1 a r_2 je daná integrálom

$$\int_{r_1}^{r_2} f_{(r)}\ d_r$$

a pravdepodobnosťou objednávky na počet kusov menší alebo rovný S bude :

$$\int_{0}^{S} f_{(r)} = F(S)$$

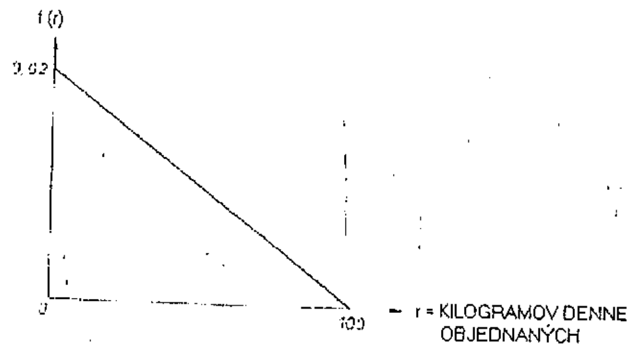
Rovnica nákladov pre úlohu tohto typu je podobná ako v predchádzajúcom prípade. Výraz P(r) v rovnici nákladov nahradíme **f (r)d**$_r$ a symbol sumy nahradíme symbolom integrálu:

$$TEC(S)=C_1\int_0^S (S-r)f(r).d_r + C_2\int_S^{\infty} (r-S)f(r).d_r$$

Analytické riešenie v tomto prípade ukazuje, že celkové očakávané náklady sú minimálne pri hodnote **S**, ktorá vyhovuje rovnici:

$$F(S)=\int_0^S f(r).d_r = \frac{C_2}{C_1+C_2}$$

Príklad: Pekársky podnik predáva istý druh svojho pečiva na váhu. Ak sa pečivo nepredá v ten istý deň, v ktorom sa upieklo, možno ho predať iba so stratou 15 Sk na kg. Možnosti predaja deň starého pečiva sú však neobmedzené. Náklady na udržiavanie 1 kg pečiva na sklade za deň sú teda 15 Sk. Na druhej strane však podnik má na každom kg pečiva predaného v ten istý deň, v ktorom sa upieklo, zisk vo výške 95 Sk. Náklady z nedostatku zásob sú teda 95 Sk za kg. Rozdelenie denných dávok má tvar trojuholníka (obr.).



Rozdelenie denných objednávok v pekárenskom podniku

Funkcia pravdepodobnosti je v tomto prípade (funkcia r): $f(r) = 0{,}02 - 0{,}0002\,r$

Našou úlohou je určiť, koľko kilogramov pečiva má podnik denne vyrobiť.

Potom

$$\frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{95}{15+95} = 0{,}8636$$

Aby sme zistili optimálnu veľkosť objednávky q_0 musíme najskôr určiť rozsah zásob S, ktorý vyhovuje podmienke:

$$F(S) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}8636 \qquad \text{t.j.} \qquad \int_0^S f(r).d_r = 0{,}8636$$

Možno to urobiť nasledovne :

$$\int_0^S f(r).d_r = \int_0^S (0{,}02 - 0{,}0002r)d_r = \left(0{,}02r - \frac{0{,}0002r^2}{2}\right)_0^S = 0{,}8636$$

$0{,}02\,S - 0{,}0001\,S^2 = 0{,}8636$

Preto $S = 100 \pm 36{,}93$

Úloha má teda dve riešenia :

1. $q_1 = 100 + 36{,}93 = 136{,}93$ kg
2. $q_2 = 100 - 36{,}93 = 63{,}07$ kg

Prvé riešenie nemá v danom prípade praktický význam, pretože uvedené rozdelenie :avdepodobnosti neplatí pre r, ktoré je väčšie ako 100 kg. Možno použiť len druhé riešenie.

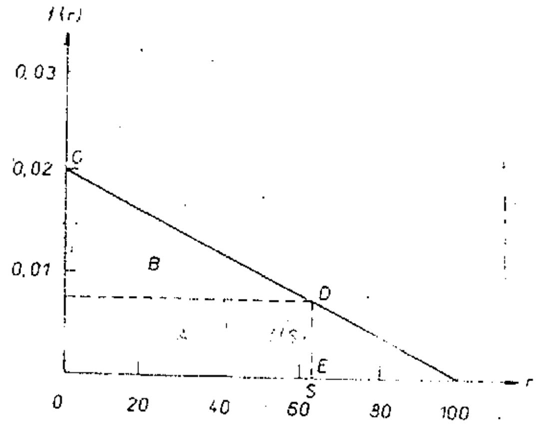


Diagram funkcie f(r)

Pretože f(r) je priamka, získali by sme v tomto prípade rovnaký výsledok aj dnoduchou geometrickou úlohou namiesto integrálneho počtu.

Modely zásob pri cenových zmenách

V tejto časti sa budeme zaoberať modelmi zásob, pri ktorých výrobné náklady na jednotku alebo nákupné náklady na jednotku zásob sú premenlivé. Táto situácia je typická pri nákupe súčiastok, pri ktorom sa poskytuje, ktorý závisí od odobratého množstva.

Budeme vychádzať zo situácie výrobku, ktorý má nakupovať alebo dodávať rovnaké množstvo R jednotiek počas obdobia T. Dopyt je teda istý a známy. Neplnenie dodávok sa nepripúšťa a z toho vyplýva, že náklady z nedostatku zásob sú nekonečné. Premenlivé náklady spojené s výrobou alebo nákupom možno označiť takto (okrem už uvedených v predchádzajúcej časti):

k_i – jednotkové výrobné alebo nákupné náklady,

P – mesačné náklady na skladovanie, vyjadrené ako desatinný podiel hodnoty jednotky

TEK – celkové očakávané náklady

TEK_0 – minimálne (optimálne) celkové očakávané náklady

b_i – množstvo, ktoré sú cenovo podmienené (podmienené rabatom)

Pretože premenlivé jednotkové výrobné alebo obstarávacie náklady sa najčastejšie vyskytujú pri kupovaní zásob budeme v našich modeloch brať do úvahy iba nakupované zásoby.

Úlohu teraz možno formovať takto:

1. Ako často treba nakupovať zásoby?
2. Koľko jednotiek je potrebné každý raz kúpiť ?

Treba zdôrazniť, že obstarávacie náklady označujeme ako C_s nemusia sa obmedzovať len na to, aby sa objednávacia činnosť uviedla do chodu. K tomu môžu patriť aj náklady na prevzatie kúpeného množstva, náklady ne vstupnú kontrolu a pod. Všade tam kde sú tieto náklady ovplyvnené nakupovaným množstvom, treba definovať obstarávacie náklady a zahrnúť ich do výpočtu C_s.

Základné rovnice nákladov:

Predpokladajme, že počas obdobia T sa má nakúpiť R jednotiek. Dopyt je teda známy a stály. Jednotkové náklady sú k_i. Potom môžeme situáciu opísať následovné (ako v príklade zásob 3.1).

$\frac{R}{q}$ - počet cyklov počas obdobia T

$$t_s = \frac{T}{\frac{R}{q}} = \frac{T_q}{R}$$

$\frac{1}{2}q$ – priemerná zásoba počas doby t_s

Pre každú sériu alebo vybavenie objednávky mesačné množstvo materiálu bude:

$$\frac{1}{2}q * t_s = \frac{1}{2}q * \frac{T_q}{R} = \frac{1}{2}\frac{T_q^{\,2}}{R}$$

a veľkosť mesačnej zásoby pre sériu bude:

$$\frac{\left(\frac{1}{2} q t_s\right)}{q} = \frac{\frac{1}{2} T_q}{R} = \frac{T_q}{2R}$$

Jednotlivé zložky nákladov na každú dodávku potom budú:

C_s– obstarávacie náklady na jednu dodávku

q_k – nákupná cena **q** jednotiek, ak jednotné náklady sú **k**

$C_s\left(\frac{T_q}{2R}\right) * P$ – náklady na vytvorenie zásob pre dobu ts

$q_k\left(\frac{T_q}{2R}\right) * P$ – náklady na nákup zásob pre dobu ts

Náklady počas obdobia t_s sú potom takéto:

$$C_s + q_k + C_s\frac{T_q}{2R}P + q_k\frac{T_q}{2R}P$$

Takže celkové náklady počas celého obdobia T sú:

$$\text{TEK} = (C_s - q_k + C_s\frac{T_q}{2R}P + q_k\frac{T_q}{2R}P)\ \frac{R}{q}$$

$$\text{TEK} = \frac{C_s R}{q} + kR + \frac{C_s TP}{2} + k\frac{TP}{2}q$$

Minimálnu hodnotu TEK dostaneme tak, že tejto funkcie položíme rovné nule a po úpravách dostaneme $\mathbf{q_0}$.

$$\mathbf{q_0} = \sqrt{\frac{C_s R}{kT} * \frac{2}{P}}$$

Dosadením q_0 do rovnice TEK dostaneme optimálne celkové náklady TEK_0, ktoré vyplývajú z jednotkovej nákupnej ceny k.

$$\text{TEK}_0 = \sqrt{2kTPC_s R} + kR + \frac{1}{2}C_s TP$$

Teraz sa budeme zaoberať situáciou keď sa nákupné náklady zmenia v dôsledku zmeny ceny.

4.1 Model zásob s jednou cenovou zmenou

Stav, ktorý charakterizuje situáciu keď dochádza k jednej cenovej zmeny možno znázorniť takto:

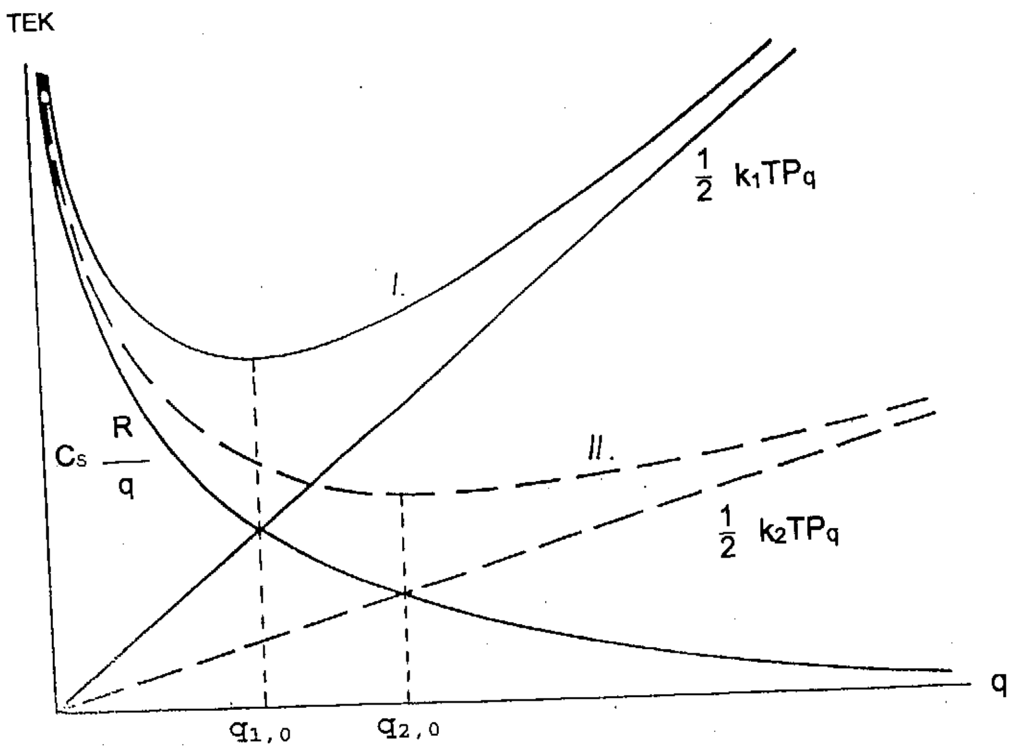
Cenová oblasť	Množstvo	Nákupná cena
R1	$1 \leq q1 < b$	k1
R2	$q2 \geq b$	k2

V tejto situácie b predstavuje minimálne množstvo nákupu na ktoré sa poskytuje navod. Pre ľubovoľne nakupované množstvo q1 v oblasti R1 budú očakávané náklady TEK dané rovnicou

$$\text{TEK} = \frac{C_s R}{q_1} + k_1 R + \frac{C_s TP}{2} + k_1 \frac{TP}{2} q_1$$

a pre ľubovoľné nakupované množstvo q_2 v oblasti R_2 budú celkové očakávané náklady TEK_2 dané rovnicou

$$\text{TEK}_2 = \frac{C_s R}{q_2} + k_2 R + \frac{C_s TP}{2} + k_2 \frac{TP}{2} q_2$$



Krivky optimálnej veľkosti série – jedna cenová zmena

Z rovníc TEK_1 a TEK_2 vyplýva, že minimálne náklady pre krivku II (zodpovedá cene k_1) sú menšie ako minimálne náklady pre krivku I (zodpovedá cene k_1). Ak teda označíme symbolmi $q_{1,0}$ a $q_{2,0}$ hodnoty q_1 a q_2 ktoré zodpovedajú minimálnym nákladom, môžeme odvodiť pre situáciu o jednej cenovej zmene následovný algoritmus:

1. Treba vypočítať $q_{2,0}$ ak

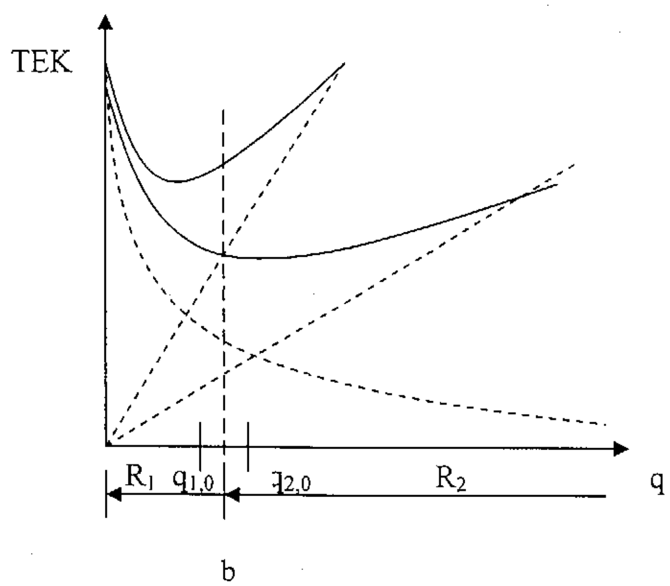
   $q_{2,0} \geq b$ optimálne množstvo nákupu alebo výrobnej sérii je $q_{2.0}$

1.1 ak $q_{2,0} < b$ nasleduje krok 2 lebo ne nakupované množstvo sa nevzťahuje rabat. Celkové očakávané náklady budú monotónne vzrastať v celej oblasti R_2 a najmenšie budú pri $q = b$.

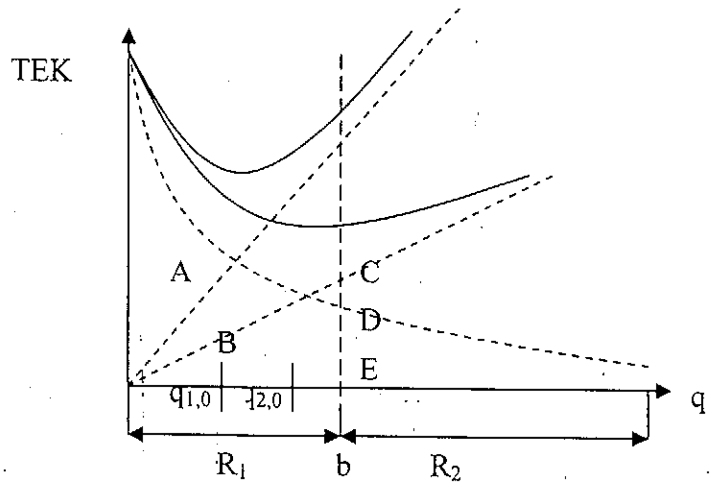
2. Vypočítame $q_{1,0}$ a náklady pre $TEK_0 (q_{1,0})$ a TEK (b).

2.1 Porovnáme $TEK_0 (q_{1,0})$ s TEK (b). Pri ktorej nakupovanej hodnote $q_{1,0}$ alebo b sú náklady menšie také množstvo kupujeme.

Uvedené riešenie algoritmu možno vyjadriť aj grafický:



Krivka optimálnej veľkosti série, $q_{2,0} \geq b$



Krivka optimálnej veľkosti série, $q_{2,0} < b$

Príklad: 1

Výrobca motorov musí ročne nakupovať 24 000 odliatkov takejto potrebe sa predpokladá, že je známa a stála. Dodávateľ odliatkov na ne poskytuje rabat, ktorý závisí od nakupovaného množstva to znamená, že ak odberateľ odoberie isté množstvo dostane ich za nižšiu cenu. Úlohou je určiť optimálne nakupované množstvo q_0. K dispozícii máme tieto informácie:

T = 12 mesiacov

R = 24 000 kusov

P = 0,02

C_s = 3 500 Sk

b = 5 000 kusov

k_1 = 15,00 Sk

k_2 = 9,00 Sk

Vypočítame $q_{2,0}$:

$$\mathbf{q_{2,0}} = \sqrt{\frac{3500 * 24000 * 2}{9 * 12 * 0{,}02}} = 8819$$

Pretože $q_{2,0}$ = 8 819 je väčšie než b = 5000 optimálne nakupované množstvo bude po 8819 kusov.

Príklad:2

Príklad ako predchádzajúci iba b = 10000 kusov.

$$q_{2,0} = \sqrt{\frac{3500*24000*2}{9*12*0{,}02}} = 8819$$

Keďže q2,0 < b musíme vypočítať $q_{1,0}$

$$q_{1,0} = \sqrt{\frac{3500*24000*2}{15*12*0{,}02}} = 7071$$

Musíme vypočítať TEK_0 $(q_{1,0})$ a TEK (b)

$$TEK_0 \quad (q_{1,0}) \quad = \quad \sqrt{2*15*12*0{,}02*3500*24000} + \quad 15*24000 + \frac{3500*12*0{,}02}{2} =$$

$$= 385012\,Sk$$

$$TEK\ (b) = \sqrt{2*9*12*0{,}02*3500*24000} + 9*24000 + \frac{3500*12*0{,}02}{2} = 235449\ Sk$$

S porovnania nákladov pri $TEK(q_{0,01})$ a TEK(b) zistime, že sú nižšie pri TEK(b) preto za optimálne nakupované množstvo budeme považovať nákup po 5000 kusov.

4.2 Modely zásob s dvoma cenovými zmenami

V týchto úlohách budeme predpokladať, že sa vyskytujú dva rabaty, ktoré závisia od odoberaného množstva. Takúto situáciu možno znázorniť nasledovne:

Cenová oblasť	Množstvo	Nákupná cena
R_1	$1 \leq q_1 < b_1$	k_1
R_2	$b_1 \leq q_2 < b_2$	k_2
R_3	$q_3 \geq b_2$	k_3

V danej situácii b_1 a b_2 sú množstvá, pri ktorých nastanú cenové zmeny. V tejto situácii platia v podstate rovnaké zásady postupu úloh, ako v predchádzajúcom prípade. Algoritmus výpočtu nákupu optimálneho množstva možno vymedziť nasledovne:

1. Treba vypočítať $q_{3,0}$.
   1.1 Ak $q_{3,0} \geq b_2$ optimálne množstvo nákupu alebo výrobnej série je $q_{3,0}$.
   1.2 Ak $q_{3,0} < b_2$ nasleduje krok 2.
2. Vypočítame $q_{2,0}$.
   2.1 Ak $q_{2,0} \geq b_1$ treba vypočítať TEK_0 $(q_{2,0})$ a TEK (b_2). Pri ktorej hodnote $q_{2,0}$ alebo b_2 sú náklady menšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup.
   2.2 Ak $q_{2,0} < b_1$ nasleduje krok 3.
3. Treba vypočítať $q_{1,0}$ a náklady pre TEK_0 $(q_{1,0})$, TEK (b_1) a TEK (b_2).
   3.1 Porovnáme TEK_0 $(q_{1,0})$ s TEK (b_1) a s TEK (b_2). Pri ktorej hodnote $q_{1,0}$, b_1 alebo b_2 sú náklady najnižšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup množstva.

Príklad: Ak v predchádzajúcich prípadoch:

$k_1 = 15$ Sk
$k_2 = 9$ Sk
$k_3 = 7$ Sk
$b_1 = 5000$ kusov
$b_2 = 8000$ kusov

Vypočítame:

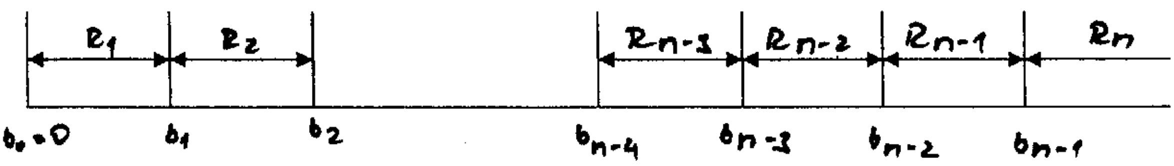
$$q_{3,0} = \sqrt{\frac{3500 * 24000 * 2}{7 * 12 * 0{,}02}} = 9258$$

Keďže $q_{3,0}$ (9258) je väčšie ako b_2 (8000) (9258 > 8000) optimálne nakupované množstvo bude 9258 kusov v priebehu jedného cyklu.

4.3 Modely zásob s viac ako dvoma cenovými zmenami

Doteraz boli uvedené pravidlá na určenie optimálneho nakupovaného množstva v prípadoch, keď jednotkové náklady podliehali jednej alebo dvom cenovým zmenám. Tieto pravidlá môžeme zovšeobecniť na prípad nákupnej situácie pre ľubovolný počet cenových zmien.

Jednotlivé cenové oblasti označíme $R_1, R_2 \ldots R_n$. Množstvá, pri ktorých nastávajú cenové zmeny označíme $b_1, b_2 \ldots b_{n-1}$. Optimálne nakupované množstvá pri jednotlivých cenách označíme $q_{1,0}, q_{2,0} \ldots q_{n,0}$. Graficky uvedenú situáciu môžeme znázorniť nasledovne:



Algoritmus pre uvedené riešenie možno vymedziť nasledovne:

1. Treba vypočítať $q_{n,0}$
   1.1 Ak $q_{n,0} \geq b_{n-1}$ optimálne nakupované alebo vyrábané množstvo je $q_{n,0}$.
   1.2 Ak $q_{n,0} < b_{n-1}$ nasleduje krok 2.
2. Vypočítame $q_{n-1,0}$.
   2.1 Ak $q_{n-1} \geq b_{n-2}$ (t.j. $b_{n-2} \leq q_{n-1,0} < b_{n-1}$) treba vypočítať TEK_0 $(q_{n-1,0})$ a TEK (b_{n-1}). Pri ktorej hodnote $q_{n-1,0}$ alebo b_{n-1} sú náklady nižšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup.
   2.2 Ak $q_{n-1,0} < b_{n-2}$ nasleduje krok 3.
3. Vypočítame $q_{n-2,0}$.
   3.1 Ak $q_{n-2,0} \geq b_{n-3}$ treba vypočítať TEK_0 $(q_{n-2,0})$, TEK (b_{n-2}) a TEK (b_{n-1}). Pri Ktorej hodnote $q_{n-2,0}$, b_{n-2} alebo b_{n-1} sú náklady najnižšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup.
   3.2 Ak $q_{n-2,0} < b_{n-3}$ nasleduje krok 4.
4. Vypočítame q_{n-3}.
   4.1 Ak $q_{n-3} \geq b_{n-4}$ treba vypočítať TEK_0 $(q_{n-3,0})$, TEK (b_{n-3}), TEK (b_{n-2}) a TEK (b_{n-1}). Pri ktorej hodnote $q_{n-3,0}$; b_{n-3}; b_{n-2} alebo b_{n-1} sú náklady najnižšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup alebo výrobu príslušného množstva.
   4.2 Ak $q_{n-3} < b_{n-4}$ nasleduje ďalší krok (5).
5. Treba takto postupovať dovtedy, kým $q_{n-j,0} \geq b_{n(j+1)}$ a porovnať TEK_0 $(q_{n-j,0})$ s TEK (b_{n-j}); TEK (b_{n-j+1}) ... TEK (b_{n-1}). Pri ktorej hodnote $q_{n-j,0}$; b_{n-j}; b_{n-j+1}; ... b_{n-1} sú náklady najnižšie, považujeme ju za optimálnu pre nákup alebo výrobu príslušného množstva.